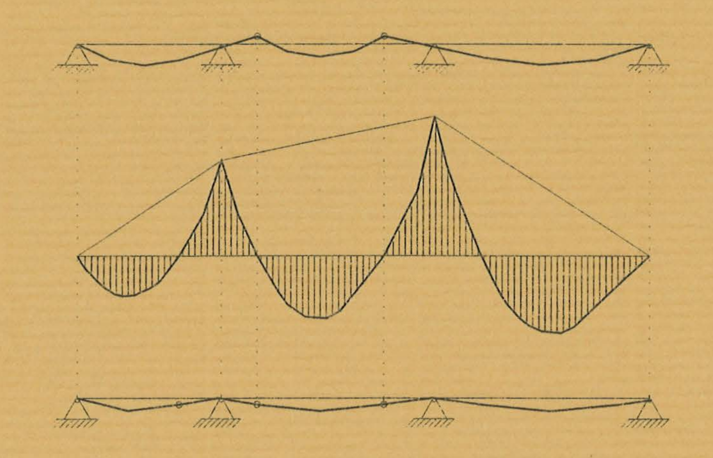
VIGAS (III)

COACCIONES DE EXTREMO VIGAS CONTINUAS

por

RICARDO AROCA HERNÁNDEZ-ROS



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

1-16-04

VIGAS (III)

COACCIONES DE EXTREMO
VIGAS CONTINUAS

por

RICARDO AROCA HERNÁNDEZ-ROS

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

1-16-04

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

1 Área
16 Autor
04 Ordinal de cuaderno (del autor)

ÁREAS

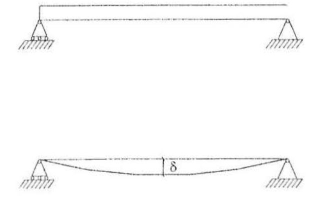
0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

VIGAS (III) Coacciones de extremo. Vigas continuas

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Nadezhda Vasileva Nicheva
CUADERNO 36.05 / 1-16-04
ISBN: 84-95365-88-X (obra completa)
ISBN-13: 978-84-9728-199-7 (Vigas III)/(5ª edición)
ISBN-10: 84-9728-199-3
Depósito Legal: M-23124-2006

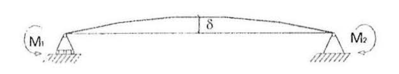
COACCIONES DE EXTREMO. VIGAS CONTINUAS.

El estudio de la rigidez de las vigas lleva a la conclusión de que para conseguir que la deformación relativa de una viga apoyada se mantenga en magnitudes compatibles con la no fisuración de la tabiquería — $\frac{\delta}{L} \leq \frac{1}{500}$ — es preciso, o bien emplear vigas muy poco esbeltas — L/d entre 1/10 y 1/12 —o bien limitar la tensión de servicio de los materiales con la consiguiente repercusión en el coste de la estructura —de hecho solamente en el caso de vigas trianguladas, en las que el canto es independiente del área de la sección, es posible hacer vigas en las que el material tenga tensiones de servicio razonables para apoyo simple en ambos extremos—.



$$\frac{\delta}{L} = \frac{5}{48} \cdot \frac{M \cdot L}{E \cdot I}$$

Por otra parte, la introducción de coacciones de extremo reduce considerablemente la flecha de las vigas —es decir, aumenta su rigidez—. Basta recordar que en una viga con momentos M_1 y M_2 en los extremos la flecha se reduce en una magnitud:

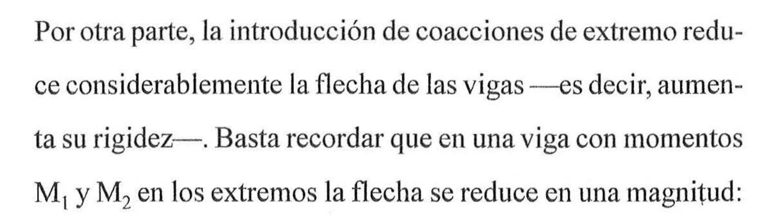


$$\frac{\delta}{L} = \frac{-M_1 + M_2}{16 \cdot E \cdot I}$$

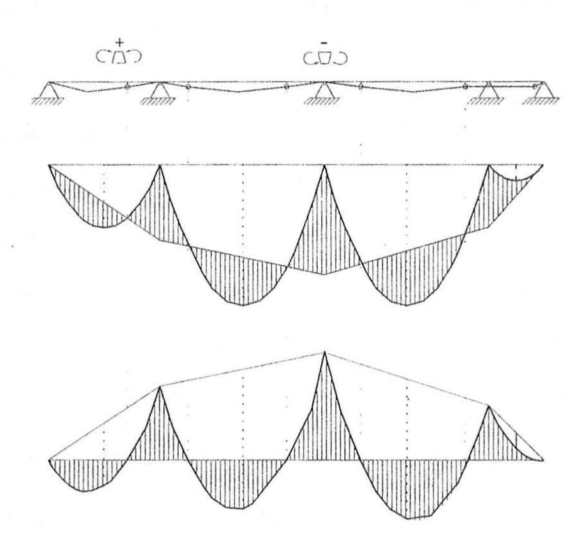
La manera más fácil de coaccionar el extremo de una viga es unir cada tramo al contiguo produciendo así lo que llamamos una **viga continua**.

La *continuidad* invita a conjeturar cómo podría deformarse la viga.

El simple intento de trazar una viga continua nos conduce a un dibujo en el que alternan tramos de curvatura invertida entre los que hay **puntos de inflexión**.



Dada la relación entre momento y curvatura es obvio que a los tramos de curvaturas con distinto sentido corresponderán momentos positivos y negativos, y que el momento es nulo en los puntos de inflexión, en los que el radio de curvatura es infinito, y por tanto al ser $1/R = 0 \Rightarrow M = 1/R \cdot E \cdot I = 0$



Realmente hay que estudiar la cuestión para hacer el trazado de forma rigurosa, ya que con las herramientas manejadas hasta ahora sólo se pueden conocer las leyes de momentos de cada tramo individual considerado como apoyado.

En efecto, suponiendo que las cargas son perpendiculares al eje de la viga, sólo se disponen de las **dos ecuaciones** de la estática:

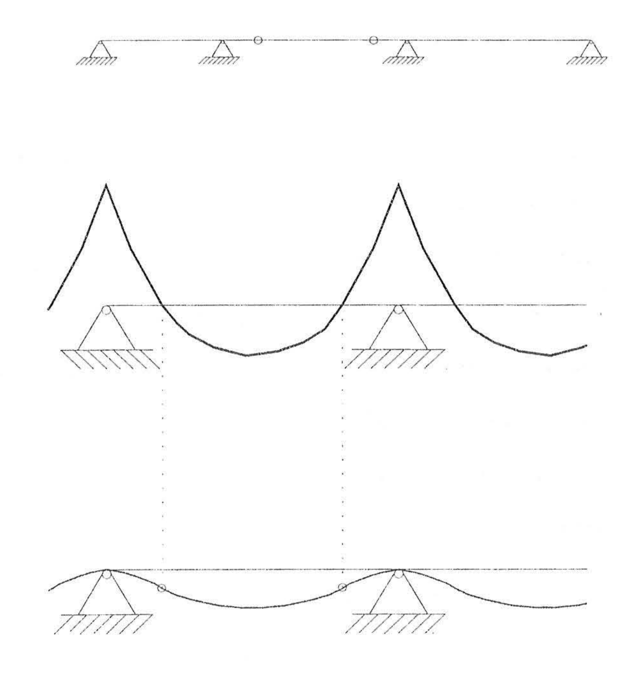
$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow$ equilibrio de cargas verticales.

$\sum M = 0 \quad \Rightarrow$ equilibrio de momentos.

Por lo tanto sólo se pueden calcular las reacciones en una viga de dos apoyos. Si hay **más de dos apoyos** el problema no tiene solución empleando sólo las ecuaciones de la estática. Se trata, pues, de un **problema hiperestático** y debemos buscar condiciones adicionales.

La manera más sencilla para resolver el problema es, como en no pocas ocasiones, cambiar el enunciado. Si se modifica la viga continua produciendo articulaciones en algunos de los tramos, cada articulación real permite añadir una ecuación $\sum M = 0$, por tanto si hay n apoyos (n > 2), basta producir n-2 articulaciones para tener una estructura isostática.

Este técnica fue empleada en tiempos en las vigas GERBER.

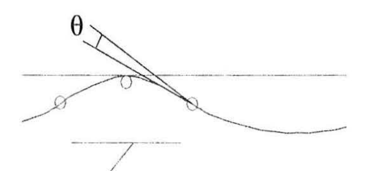


En las vigas GERBER se ejecutaban las articulaciones necesarias para poder calcular con solo las ecuaciones de la estática las reacciones en los apoyos y las solicitaciones.
Colocando adecuadamente las articulaciones se consigue el mismo efecto en cuanto a rigidez y puntas de momento que en una viga continua.
Veremos más adelante que si no se toma uno el trabajo adicional de hacer las articulaciones la viga continua admite como poco la misma carga que la GERBER.

Si se elige la posición de las articulaciones con tal habilidad que las curvas de las directrices a ambos lados de la articulación formen una curva continua se puede evitar construirlas en la práctica.

Ya se entiende que la empresa no es fácil y que lo normal será que tengamos una discontinuidad de trazado:

El ángulo de las tangentes a ambos lados de la articulación da idea de la magnitud del error cometido en el empeño.



Volviendo a tomar el razonamiento, parece de sentido común que **si una viga continua a la que se dan unos cortes es capaz de resistir una determinada carga, si no se le dan cortes funcionará al menos tan bien como la cortada; esta consideración permitiría sustituir el trabajo de ejecutar unos cortes reales por el experimento mental de suponer la existencia de unas articulaciones virtuales imaginando así una forma viable de trabajo de la estructura que tendría la ventaja de proporcionar un sistema isostático y por tanto, fácilmente calculable.**

Veamos las consecuencias de imaginar la existencia de unas articulaciones y luego no ejecutarlas:

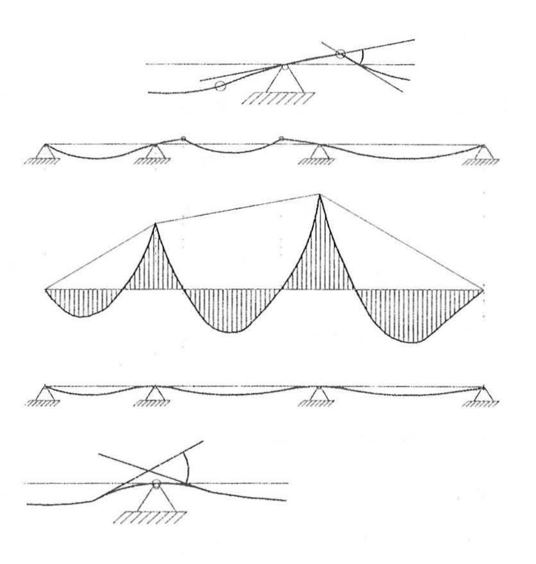
Pueden producirse dos situaciones:

1. —La más improbable—. Que calculada la forma de las vigas correspondiente a las gráficas de momentos resultantes, haya en efecto una continuidad de trazado a ambos lados de cada articulación virtual, lo que demuestra que era innecesario ejecutar articulaciones reales puesto que no se produce giro alguno.

2. — La segura —. Que no haya continuidad.

En ese caso, la restitución de la integridad de cada tramo, con curvaturas acordes a la gráfica de momentos, sólo podría ha-

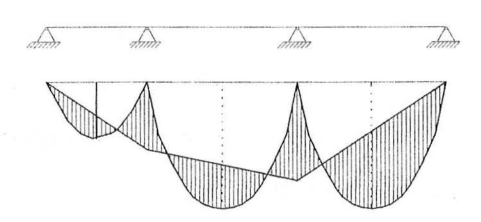
cerse transfiriendo el giro al apoyo. De hecho, si la viga es lo suficientemente dúctil, estos giros discretos pueden producirse en n-2 puntos de la estructura cuando el momento alcanza el valor del momento plástico sin que se produzca la ruina formando lo que llamamos **rótulas plásticas**, que sí tienen una existencia real.



La consideración de la formación de rótulas plásticas nos lleva a un método de cálculo denominado **método de la carga última**. Basta saber que **en una viga continua de material dúctil, si para una carga dada se puede encontrar un esquema de solicitaciones que cumpla las condiciones de equilibrio y las de resistencia, en todos los puntos la viga soportará al menos esa carga.**

Esto abre un procedimiento fácil para comprobar la validez de una viga continua —o para dimensionarla—: **basta colocar las gráficas de momentos isostáticos de cada tramo y trazar una línea de cierre arbitraria. La gráfica real de momentos será así o más favorable, nunca menos.**

Una vez trazada la línea de cierre habrá que comprobar que todas las puntas de momento son resistidas.



—Ni que decir tiene que:

a) Los momentos de los **voladizos** son ***intocables***.

b) Un trazado hábil deberá tender a conseguir las puntas de momento menores posibles.

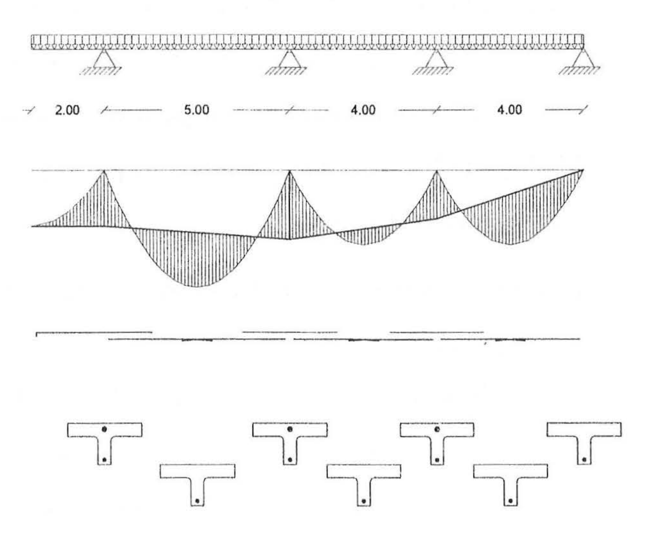
El método de la carga última permite comprobar la resistencia de una viga, pero no calcular las deformaciones ni por tanto comprobar su rigidez.

El método de la carga última tiene dos variantes:

a) cuando pueden diseñarse diferentes tensiones de la viga de forma que resistan momentos distintos, como en el caso del hormigón armado

Basta: dibujar las gráficas de momentos isostáticos, trazar una línea de cierre (respetando en todo caso los momentos de los voladizos) y armar cada tramo de la viga cubriendo los gráficos de momentos:

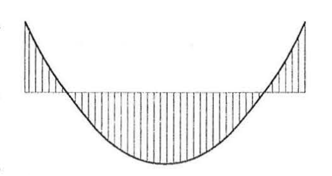
Ejemplo: carga $7{,}5 \times 0{,}6 = 4{,}5\ \mathrm{kN} \cdot \mathrm{m}^{-1}$



b) cuando se trata de calcular la menor sección posible para una viga de resistencia constante, como es el caso de elegir un perfil laminado.

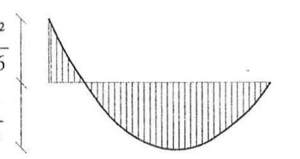
Se trata de buscar el tramo en que se precisa una mayor resistencia, que será el determinante para el diseño, hay pues que buscar la línea de cierre que dé lugar a la menor punta posible de momento, para ello, en el caso de carga uniforme, hay unas ciertas reglas:

1. En los tramos interiores de menor punta de momento corresponde a $\frac{p \cdot l^2}{16}$ $\frac{p \cdot l^2}{16}$



(obviamente el vano más desfavorable es el de mayor luz)

2. En los tramos extremos, la línea de cierre más favorable es $\frac{p \cdot l^2}{11{,}6}$ $\frac{p \cdot l^2}{11{,}6}$

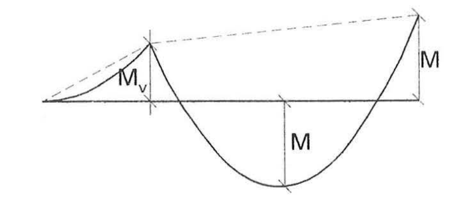


3. En los voladizos el momento inevitable es el isostático



4. En vanos adyacentes a un voladizo

$$M \cong \frac{p \cdot l^2}{12} - \frac{M_v}{3}$$



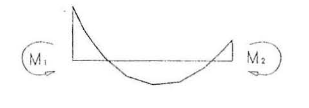
ANÁLISIS ELÁSTICO DE VIGAS CONTINUAS

El trazado de la línea de cierre resuelve fácilmente el problema de la comprobación de la resistencia supuesta la necesaria ductilidad de la viga, pero para comprobar la rigidez, cuando es necesaria una cierta precisión, hay que conocer la ley real de momentos bajo carga de servicio; y para ello debe recurrirse al análisis elástico.

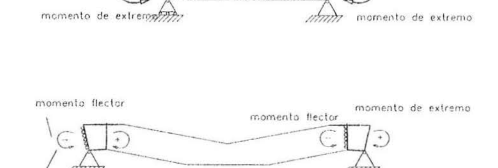
En lo que sigue se suponen conocidos los momentos de extremo —el cálculo se verá más adelante— para explicar algunos conceptos:

Reacciones hiperestáticas.

Una vez determinados los momentos de extremo de **un tramo** de viga continua se tiene una gráfica sobre la que conviene hacer las siguientes observaciones:



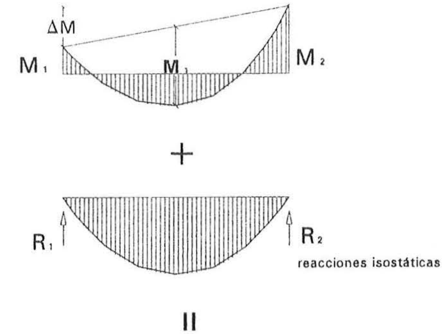
- Aunque los **momentos de extremo** — mal llamados momentos de empotramiento— tengan en general distinto signo, el izquierdo negativo y el derecho positivo, los momentos flectores son negativos en ambos extremos. Ello se debe a que el signo del momento flector coincide en el apoyo izquierdo con el del momento de extremo y en cambio es el opuesto en el apoyo derecho.



- Si los momentos de extremo son distintos en valor absoluto, es decir, si $M_1 + M_2 \neq 0$, las reacciones son distintas de las que corresponderían al tramo apoyado-apoyado con la misma carga.

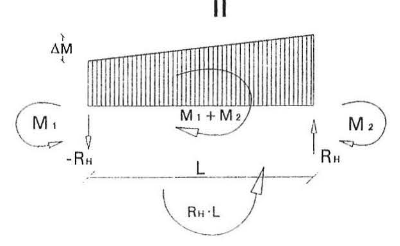
En efecto, para que M_1 y M_2 no alteren el equilibrio de momentos es preciso que existan dos fuerzas de magnitud $|R_H|$ tales que:

$$R_H \cdot L + (M_1 + M_2) = 0$$



La regla más sencilla es que: $|R_H| = \dfrac{\Delta M}{L}$

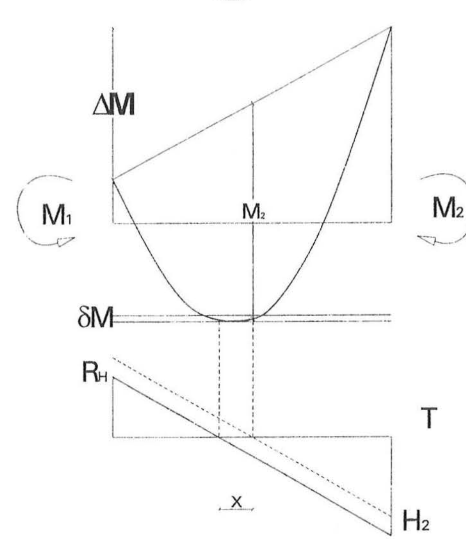
y el valor así obtenido se suma a la reacción del extremo en la que el pico de la gráfica de momentos es más alto y se le resta a la otra.



Así se restablece el equilibrio de momentos sin alterar el de fuerzas verticales.

R_H es conocida como **reacción hiperestática** —término impropio teniendo en cuenta que aparece igualmente en una viga con voladizos distintos en ambos extremos, que es isostática—

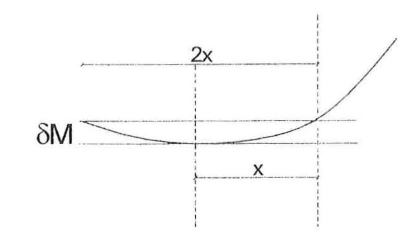
Momentos máximos de vano



Las gráficas de momentos y cortantes de un tramo de viga continua quedan, pues, como se indica en la figura; el momento máximo positivo corresponde al punto de cortante nulo y ambos quedan desplazados del centro de la viga.

Para el caso habitual de carga uniforme el momento positivo máximo es fácil de hallar:

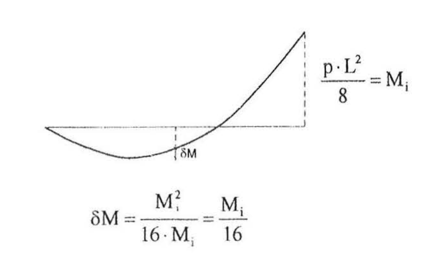
La distancia x del punto de momento máximo al centro de la viga es: $x = \dfrac{R_H}{p} = \dfrac{\Delta M}{L \cdot p}$



La diferencia δM entre el momento en el centro de la viga y el momento máximo corresponde a la flecha de una pequeña parábola de cuerda 2·x

$$\delta M = \frac{p \cdot (2 \cdot x)^2}{8} = \frac{p \cdot x^2}{2} \text{ y sustituyendo:}$$

$$\delta M = \frac{P \cdot \Delta M^2}{2 \cdot L^2 \cdot p^2} = \frac{\Delta M^2}{16 \cdot \left(\dfrac{p \cdot L^2}{8} \right)} = \frac{\Delta M^2}{16 \cdot M_i}$$



$$\delta M = \frac{M_i^2}{16 \cdot M_i} = \frac{M_i}{16}$$

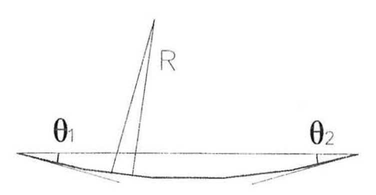
de manera que el momento máximo de vano es:

$$M^{+}_{máx} = \left(M_i + \frac{M_1 + M_2}{2} \right) + \frac{\Delta M^2}{16 \cdot M_i}$$

ya se ve en la fórmula que el signo de ΔM es irrelevante y que δM sólo es importante cuando ΔM es relativamente grande en relación con M_i.

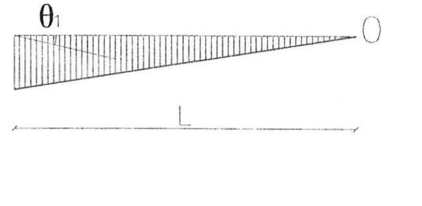
Como paso previo para estudiar el efecto de los giros es necesario analizar en detalle la deformación de **un tramo** de una viga.

GIROS EN LOS EXTREMOS DE UNA VIGA



Para calcular el giro de un punto de una viga cuyas curvaturas locales $\left(\frac{1}{R}\right)$ son conocidas, basta colocar en el punto un **momento unidad 1** que produce una gráfica de momentos M(1).

Aplicando el **principio de los trabajos virtuales**:



$$1 \cdot \theta = \int_0^L M(1) \cdot \left(\frac{1}{R}\right) \cdot dx$$

de forma análoga al procedimiento de operación para el cálculo de flechas, las gráficas M(1) correspondientes a ambos extremos serán las de la figura.

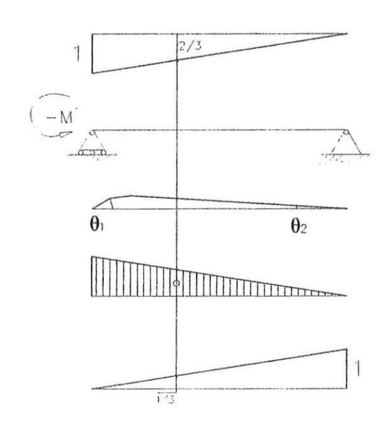
Para distintos casos de carga:

$$\theta_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{M}{E \cdot I} \cdot L \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{M \cdot L}{E \cdot I}$$

Carga uniforme $M_i = \frac{P \cdot L^2}{8}$

$$\theta_1 = \frac{-M}{E \cdot I} \cdot L \cdot \frac{1}{2} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{M \cdot L}{E \cdot I}$$

Momentos de extremo -M y M



$$\theta_1 = \frac{-M \cdot L}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{2}{3} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{M \cdot L}{E \cdot I}$$

Un solo momento de extremo -M

$$\theta_2 = \frac{-M \cdot L}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{-1}{3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{M \cdot L}{E \cdot I} = \frac{-\theta_1}{2}$$

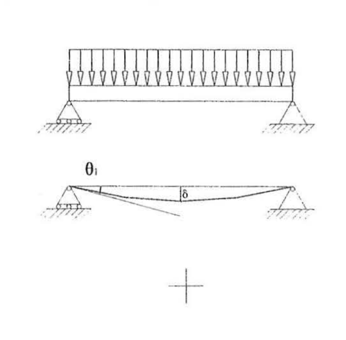
con estos dato s se pueden calcular los momentos y deformacionbes de un tramo cuyos extremos estén coaccionados.

VIGA DOBLEMENTE EMPOTRADA

Para impedir el giro en ambos extremos de una viga basta superponer la deformación correspondiente a dos momentos que produzcan el mismo giro de extremo en sentido contrario:

Con carga uniforme.

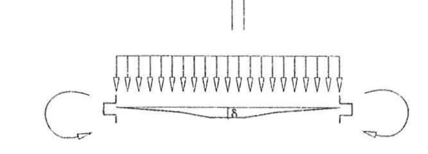
Para carga uniforme y extremos libres:



$$\theta_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{M \cdot L}{E \cdot I}$$

$$M_1 = \frac{P \cdot L^2}{8}$$

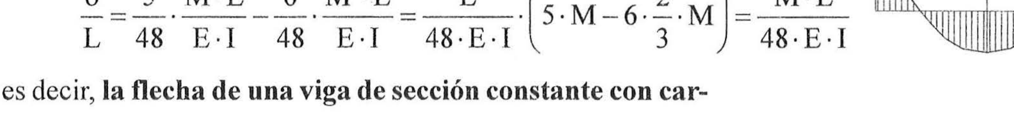
Para momentos de extremo -M' y M':



$$\theta_1 = \frac{-1}{2} \cdot \frac{M' \cdot L}{E \cdot I}$$

$$\frac{1}{2} \cdot M' = \frac{1}{3} \cdot M_1 \Rightarrow M' = \frac{2}{3} \cdot M_1 = \frac{P \cdot L^2}{12} \Rightarrow M' = \frac{P \cdot L^2}{12}$$

La flecha final será:



$$\frac{\delta}{L} = \frac{5}{48} \cdot \frac{M \cdot L}{E \cdot I} - \frac{6}{48} \cdot \frac{M' \cdot L}{E \cdot I} = \frac{L}{48 \cdot E \cdot I} \cdot \left(5 \cdot M - 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot M \right) = \frac{M \cdot L}{48 \cdot E \cdot I}$$

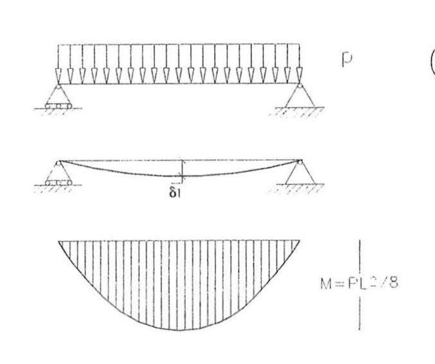
es decir, **la flecha de una viga de sección constante con carga uniforme se reduce a la quinta parte al impedir el giro en los extremos.**

Si se diseña una viga doblemente apoyada para una carga uniforme P, su flecha será $\delta_1 = \frac{5}{48} \cdot \frac{M \cdot L}{E \cdot I}$ y para un $\varepsilon = 0{,}8 \cdot 10^3$ y un $\frac{\delta}{L} \leq \frac{1}{500}$ la esbeltez límite será 12, para piezas más esbeltas ($\lambda > 12$) la tensión de servicio se verá reducida $\sigma \cong f \cdot \frac{12}{x}$

Si la empotra la misma viga la flecha se reducirá a la quinta parte y por tanto la nueva esbeltez límite será $\lambda_{lím} = 5 \cdot 12 = 60$.

Pero teniendo en cuenta que el momento máximo es ahora menor lo lógico es sacar partido de este hecho, bien usando una viga menor, bien aumentando la carga. —Puede usarse el símil de que en un sistema de vigas paralelas se pueden pasar las vigas a vez y media la distancia. En ese caso la flecha se multiplicará por 3/2 y $\lambda_{lím} = 60 \cdot \frac{2}{3} = 40$

La flecha y por tanto la esbeltez límite dependerán del **momento de diseño:**

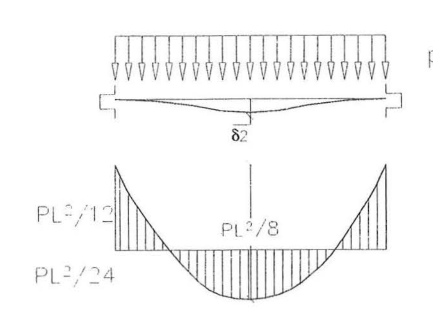


(1)



$$\delta_1 = \frac{5}{48} \cdot \frac{M \cdot L}{E \cdot I} \qquad \boldsymbol{\lambda_{lím}=12}$$

momento de diseño: $\frac{P \cdot L^2}{8}$



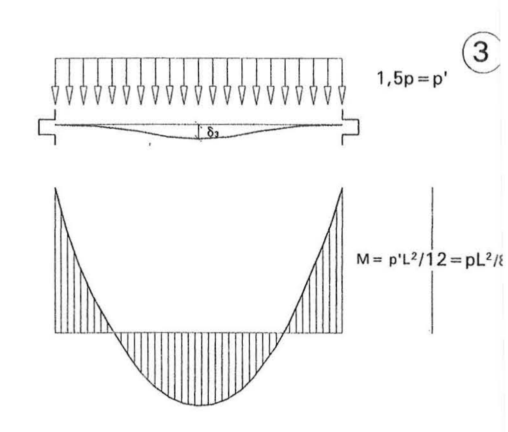
(2)

$$\delta_2 = \frac{1}{48} \cdot \frac{M \cdot L}{E \cdot I} \qquad \boldsymbol{\lambda_{lím} = 60}$$

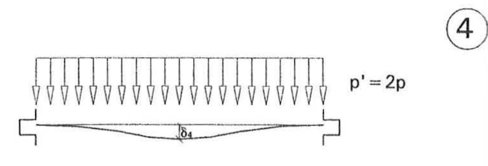
momento de diseño: $\frac{p \cdot L^2}{8}$

$$\delta_3 = 1{,}5 \cdot \delta_2 = \frac{1{,}5}{48} \cdot \frac{M \cdot L}{E \cdot I} \qquad \lambda_{lím} = \mathbf{40}$$

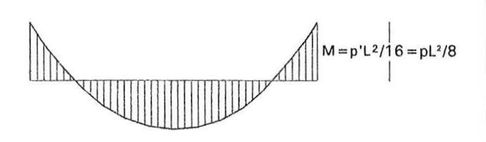
momento de diseño: $\dfrac{p \cdot L^2}{12}$



Haciendo uso del anterior razonamiento para vigas continuas, puede situarse la línea de cierre en el centro de la gráfica de momentos usando en la práctica como momento de diseño $P \cdot \dfrac{L^2}{16}$, lo que permitiría duplicar la carga respecto a la situación 2.



Ello conduciría al doble de flecha y por tanto a una esbeltez límite $\lambda_{lím} = \cdot 60 = 30$

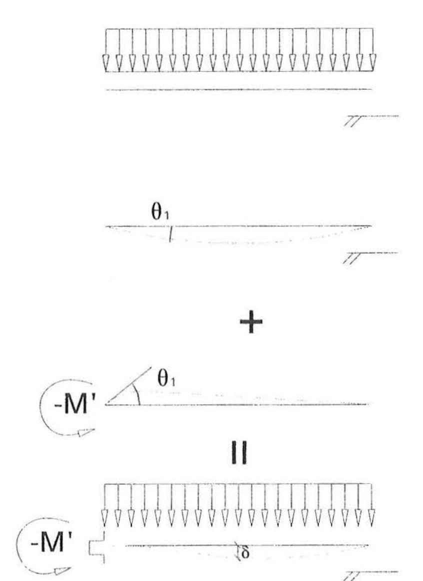


$$\delta_4 = 2 \cdot \delta_2 = \frac{2}{48} \cdot \frac{M \cdot L^2}{E \cdot I} \qquad \lambda_{lím} = \mathbf{30}$$

momento de diseño: $\dfrac{p \cdot L^2}{16}$

Según el criterio de diseño empleado se obtiene la esbeltez límite que aun en el caso de $\lambda_{lím} = 30$ permite, ya vigas tan esbeltas que prácticamente nunca será preciso dimensionar por rigidez (salvo una combinación de cargas sean muy pequeñas y criterio de rigidez muy estricto). En consecuencia, empleando vigas continuas, se pueden aprovechar las posibilidades resistentes del material.

VIGA EMPOTRADA-APOYADA



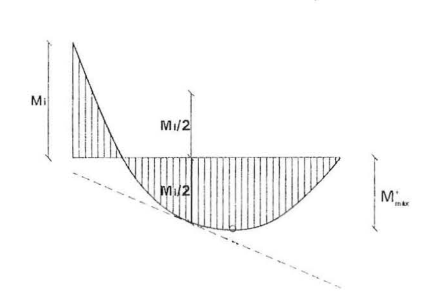
$$\theta_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{M \cdot L}{E \cdot I}$$

$$M = \frac{P \cdot L^2}{8}$$

$$\theta_1 = \frac{-1}{3} \cdot \frac{M' \cdot L}{E \cdot I}$$

$$M = M' = \frac{P \cdot L^2}{8}$$

$$\frac{\delta}{L} = \frac{5}{48} \cdot \frac{M \cdot L}{E \cdot I} - \frac{3}{48} \cdot \frac{M \cdot L}{E \cdot I} = \frac{2}{48} \cdot \frac{M \cdot L}{E \cdot I}$$



momento máximo de vano:

$$M^+_{máx} = \frac{M_i}{2} + \frac{M_i^2}{16M_i} = \frac{9}{16}M_i$$

La flecha se reduce a los 2/5 pero el momento máximo no varía, por lo tanto la carga posible seguirá siendo la misma y la esbeltez límite podrá multiplicarse por 5/2 $\Rightarrow$ $\lambda_{\text{lím}}$ **= 30**

Por tanto, pese a la menor rigidez de los vanos extremos de una viga continua, el valor de la esbeltez límite sigue siendo considerable y hay una alta posibilidad de que el dimensionado se efectúe por resistencia. Podríamos concluir que:

Si dimensionada por resistencia una viga continua, la esbeltez del tramo más desfavorable es λ < 30 no es necesario efectuar la comprobación de rigidez.

—La esbeltez límite será distinta si las exigencias de rigidez son diferentes de $\frac{\delta}{L} \leq \frac{1}{500}$ o si hay otros factores, como las deformaciones diferidas en el caso del hormigón armado—.

CÁLCULO DE SOLICITACIONES EN VIGAS CONTINUAS EN SITUACIÓN DE SERVICIO

Si es necesario comprobar con precisión la rigidez de una viga continua, hay que conocer las solicitaciones en situación de servicio. Para ello se completarán las dos ecuaciones de equilibrio —fuerzas verticales y momentos— con las (n–2) ecuaciones de compatibilidad de giros en los apoyos interiores de la viga.

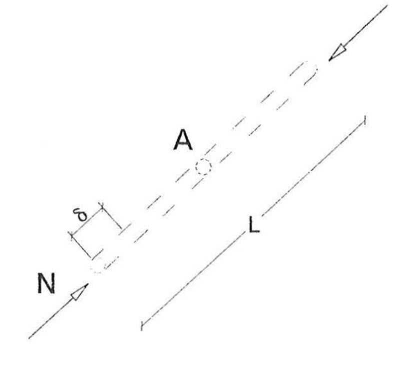


Es decir, se establece la continuidad de deformaciones entre los extremos de los tramos, dos a dos. De esta forma se tienen las n ecuaciones necesarias para resolver el problema; lo que puede hacerse de varias formas:

- La más empleada históricamente, conocida como **método de Cross**, debida a Hardy Cross consiste en suponer inicialmente bloqueados todos los nudos y permitir sucesivamente un giro hasta llegar a una situación de equilibrio.



- El **método universal** consiste en considerar como grados de libertad el giro de la viga en los nudos interiores, calcular la matriz de rigidez de la estructura e invertirla.



En ambos sistemas, como paso previo, es necesario definir la **rigidez a flexión de una viga**, de forma semejante a como se definió en su momento la rigidez de una barra sometida a esfuerzo normal:

$$N = k \cdot \delta$$

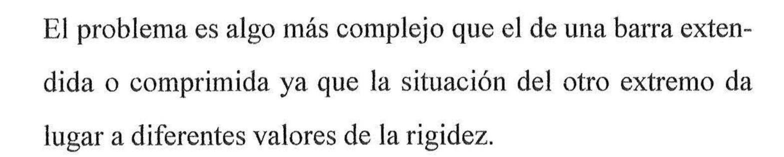
$$k = \frac{A \cdot E}{L}$$

En el caso de una barra flectada se define la rigidez como la relación momento aplicado / giro producido:

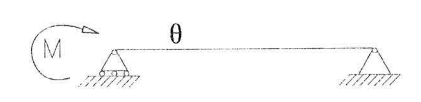


$$k = \frac{M}{\theta}$$

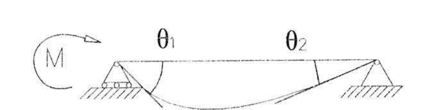
$$M = k \cdot \theta$$


El problema es algo más complejo que el de una barra extendida o comprimida ya que la situación del otro extremo da lugar a diferentes valores de la rigidez.

Se deducen todos ellos a partir de los valores calculados antes:



$$\theta_1 = \frac{M \cdot L}{3 \cdot E \cdot I} \qquad \theta_2 = \frac{-M \cdot L}{6 \cdot E \cdot I}$$



para este caso $k = \dfrac{M}{\dfrac{M \cdot L}{3 \cdot E \cdot I}} = \dfrac{3 \cdot E \cdot I}{L}$ (kN·m)

La rigidez es proporcional a:

- La rigidez del material E
- La inercia de la sección I

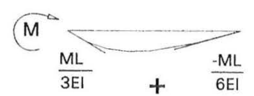
E inversamente proporcional a:

- La luz de la viga L

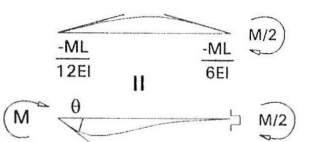
Si el extremo está empotrado:



$$\theta = \frac{M \cdot L}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) = \frac{M \cdot L}{4 \cdot E \cdot I} \qquad k = 4 \cdot \frac{E \cdot I}{L}$$

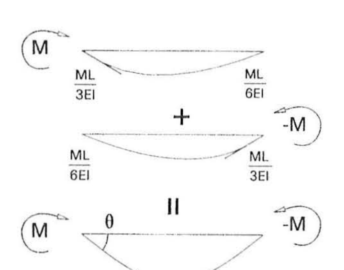


aparece un momento mitad del mismo signo en el extremo opuesto.



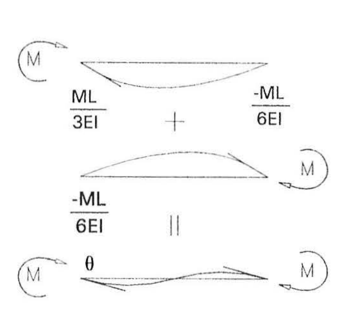
- Si hay dos momentos simétricos en los extremos:

$$\theta = \frac{M \cdot L}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) = \frac{M \cdot L}{2 \cdot E \cdot I}$$



- Si hay dos momentos del mismo signo en los dos extremos:

$$\theta = \frac{M \cdot L}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) = \frac{M \cdot L}{6 \cdot E \cdot I}$$



En resumen:

K

3·E·I/L



4·E·I/L



2·E·I/L

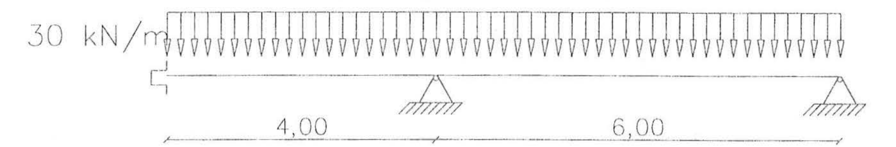


6·E·I/L

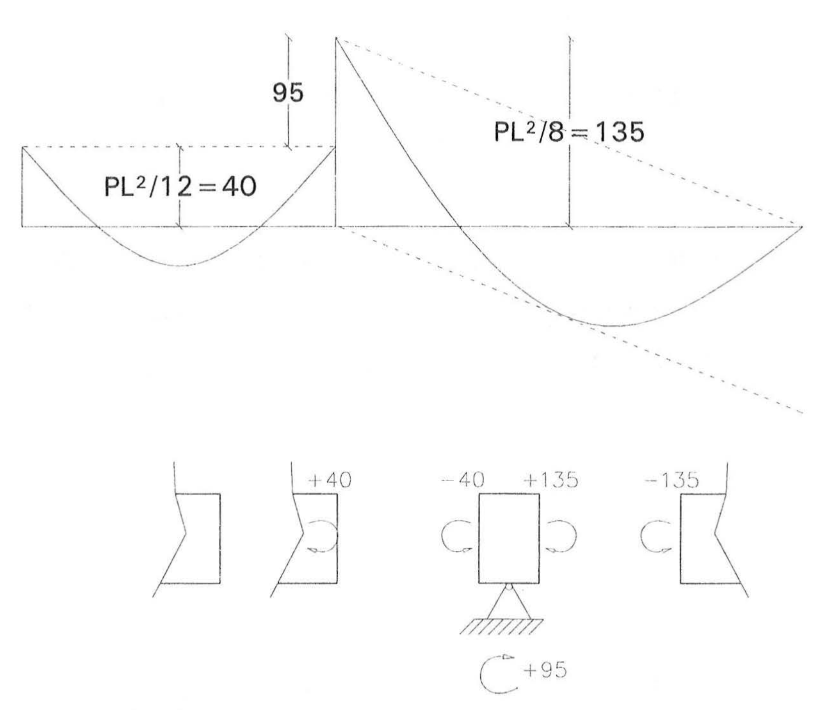


Ejemplo

A continuación un ejemplo sencillo demostrará cómo se puede usar del concepto de rigidez a flexión para resolver el caso de una viga de tres apoyos.

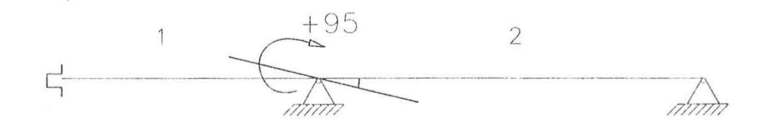


Se empieza suponiendo que existe una mordaza que impide girar el nudo.



Las vigas tienden a hacer girar la mordaza con un momento de + 95 kN·m.

La manera de soltar la mordaza es aplicar a las vigas descargadas un momento de + 95 kN·m y sumar el resultado a la gráfica anterior:



El momento producirá un giro θ en el nudo. Para calcularlo se halla la rigidez de las vigas 1 y 2:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} = E \cdot I \\ k_2 &= \frac{3 \cdot E \cdot I}{L} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot I \end{aligned}\right\} \text{dado que ambas vigas tienen la misma sección}$$

Cuando se intenta girar el nudo, la rigidez de éste es la suma de las de las barras que acometen a él.

$$\sum k = k_1 + k_2$$

$$\theta = \frac{M}{\Sigma k}$$

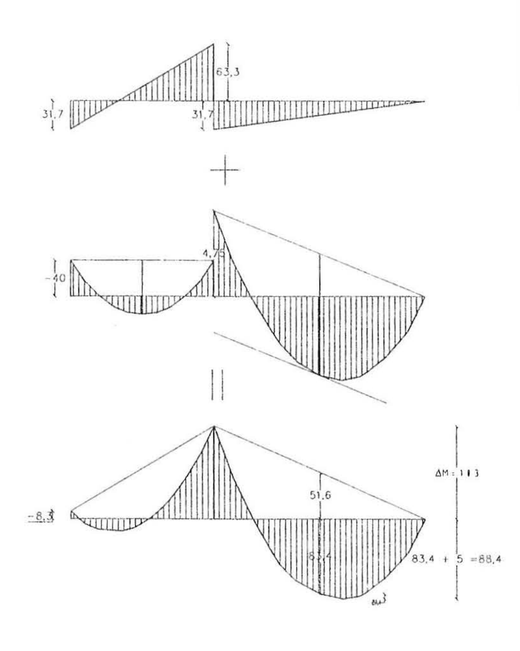
El giro producirá en cada una de las barras un momento

$$M_i = k_i \cdot \theta = M \cdot \frac{k_i}{\Sigma k}$$

El momento M *se reparte* proporcionalmente a las rigideces de las barras que acometen al nudo —no es pues necesario llegar a calcular el valor real de θ que en sí mismo es irrelevante—.

$$M_1 = 95 \cdot \frac{E \cdot I}{1{,}5 \cdot E \cdot I} = \frac{2}{3} \cdot 95 = 63 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = 95 \cdot \frac{0{,}5 \cdot E \cdot I}{1{,}5 \cdot E \cdot I} = \frac{1}{3} \cdot 95 = 31{,}7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



Además en el extremo izquierdo de la viga 1 aparecerá un momento de extremo de $\frac{1}{2} \cdot 63{,}3 = 31{,}7$

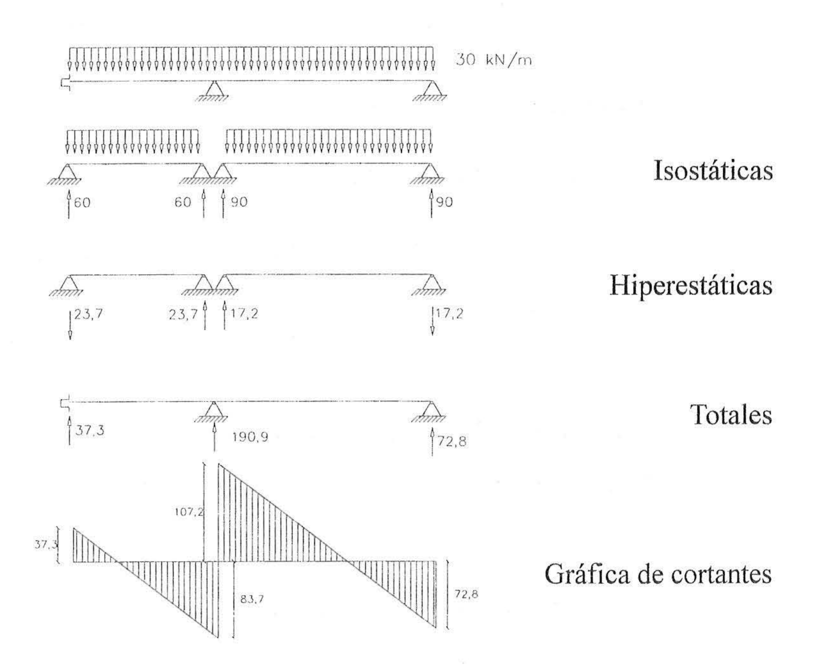
El momento en el vano 2 es $M^{+}_{\text{máx}} = 135 - 51{,}6 + \delta M$

$$\delta M = \frac{\Delta M^2}{16 \cdot M_i} = \frac{103{,}3^2}{16 \cdot 135} = 5$$

$$M^{+}_{\text{máx}} = 83{,}4 + 5 = 88{,}4$$

103,3 es pues el momento máximo a efectos de dimensionar la viga.

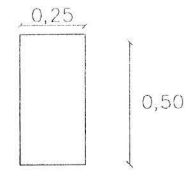
CORTANTES Y REACCIONES



Si se resuelve el problema con una viga de madera de sección rectangular:

$$f = 10 \text{ N·mm}^{-2}$$

$$W_x = \frac{10{,}3 \cdot 10^3}{10} = 10330 \text{ mm}^2 \cdot \text{m}$$



Tomando una sección de $0{,}50 \times 0{,}25$

$$W_x = \frac{125000 \cdot 0{,}5}{6} = 10417 > 10330$$

El máximo cortante es:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{107{,}2 \cdot 10^3}{\frac{2}{3} \cdot 500 \cdot 250} = 1{,}29 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} < 2$$

En cuanto a rigidez:

$$\lambda = \frac{6000}{500} = 12 << 30,$$ luego no es necesaria comprobación.

En cuanto al giro θ, aunque no es relevante:

$E = 12,5\ kN{\cdot}mm^{-2}$

$I = 10333 \cdot 0,5/2 = 2582,5\ mm^2{\cdot}m^2 \Rightarrow E{\cdot}I = 32,28 \cdot 10^3\ kN{\cdot}m^2$

$$\theta = \frac{M}{\Sigma k} = \frac{95}{1,5 \cdot E \cdot I} = \frac{95}{48,4 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-3} = 2\ mm/m$$

Cuando la viga tiene más de dos tramos el método de Cross implica la liberación sucesiva de los nudos hasta llegar a una razonable aproximación a la situación de equilibrio.

Por el método de la carga última. El procedimiento es el siguiente:

$$\frac{pL^2}{11,6} = \frac{30 \cdot 36}{11,6} = 93\ kN \cdot m$$

$W_x = 547$ IPE 300

Para la aplicación del método universal conviene expresar las rigideces de barra de la siguiente forma:



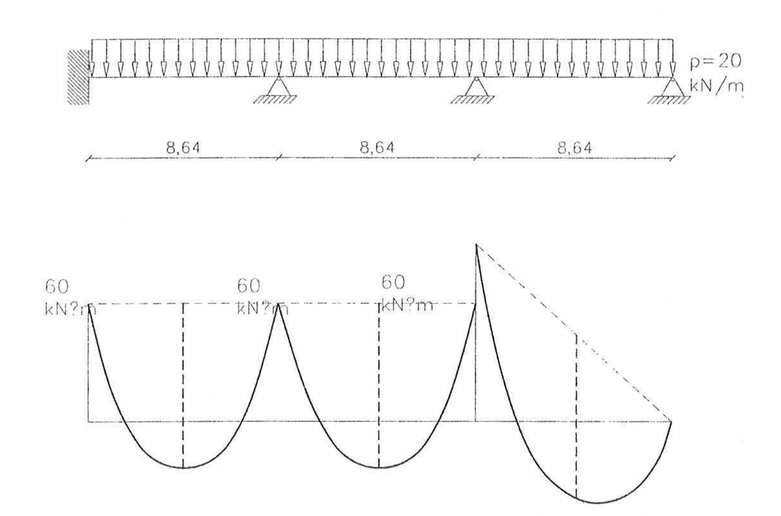
$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{E \cdot I}{L} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$



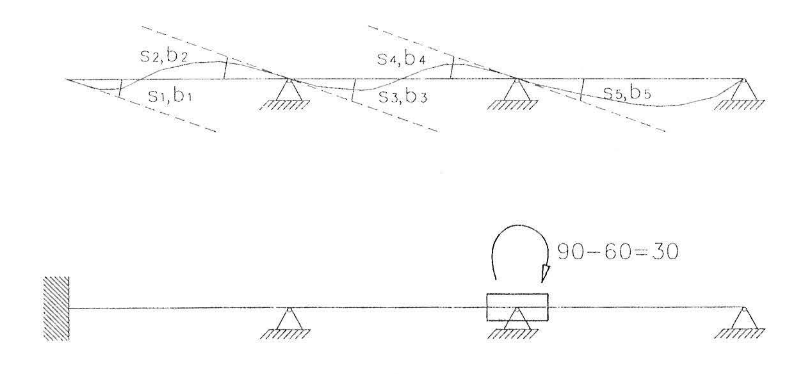
$$\{M\} = \frac{E \cdot I}{L} \cdot [3] \cdot \{\theta\}$$

EJEMPLO

La viga continua de la figura es de sección constante de madera. Se caracteriza por $E \cdot I = 39 \cdot 10^{-3}\ kN \cdot m^2$



Los giros en los dos apoyos interiores son los dos únicos grados de libertad imprescindibles, de manera que $a_1 = \theta_1$ y $a_2 = \theta_2$. Los movimientos de barra son cinco, considerando que el tercer tramo está articulado en el extremo.



Las relaciones entre los giros reales $\{b\}$ y los giros de libertad de la estructura $\{\theta\}$ son:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\{b\} = [B] \cdot \{a\} \qquad \{a\} = [K]^{-1} \cdot \{M_0\} \qquad K = [B]^T \cdot [K_u] \cdot [B]$$

$$K_u = \begin{bmatrix} \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3 \cdot E \cdot I}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 26 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

El efecto de las acciones exteriores sobre los giros de libertad es:

$$s_0 = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \\ 60 \\ 90 \end{bmatrix}$$

①

-60 60 = 0

-60 90 = +30

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Conocidos K_u y r_0 se puede calcular a; con a, la matriz b, y con b y K_u, la matriz s de los momentos que aparecen en las barras debidos a r:

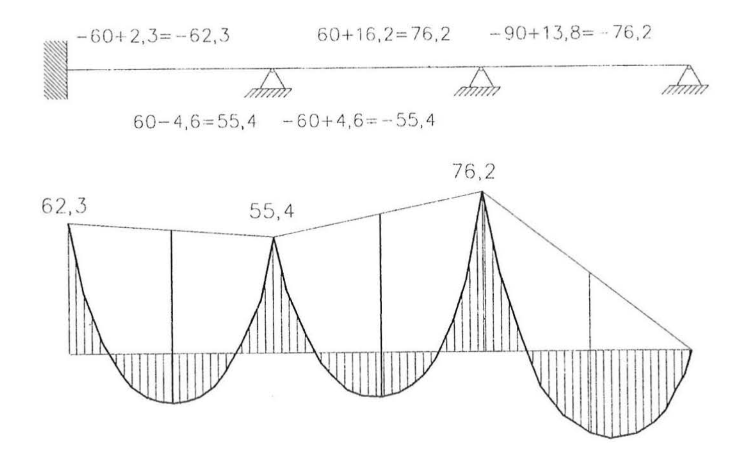
$$s = K_u \cdot b = \begin{bmatrix} -2,3 \\ -4,61 \\ 4,61 \\ 16,15 \\ -13,84 \end{bmatrix}$$

y sobre los extremos de las barras

$$\mathbf{s}_0 = \begin{bmatrix} 60 \\ -60 \\ 60 \\ -60 \\ 90 \end{bmatrix}$$

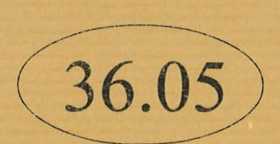
Pero esos extremos tenían ya momentos s_0, de manera que los momentos totales serán:

$$s_0 + s = \begin{bmatrix} -62,3 \\ 55,39 \\ -55,39 \\ 76,16 \\ -76,16 \end{bmatrix}$$



NOTAS

CUADERNO



CATÁLOGO Y PEDIDOS EN

http://www.aq.upm.es/of/jherrera

info@mairea-libros.com

84-9728-199-3

